Лекция 4. Функциональные ряды. Степенные ряды. Формула Тейлора

4.1. Функциональные ряды: основные понятия, область сходимости

Определение 1. Ряд, члены которого являются функциями одной или нескольких независимых переменных, определёнными на некотором множестве, называется *функциональным рядом*.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$, члены которого являются функциями одной независимой переменной *x*. Сумма первых *n* членов ряда $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ является частичной суммой данного функционального ряда. Общий член $u_n(x)$ есть функция от *x*, определённая в некоторой области. Рассмотрим функциональный ряд в точке $x = x_0$. Если соответствующий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$сходится, т.е. существует предел частичных сумм этого ряда $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$(где $S(x_0) < \infty$ − сумма числового ряда), то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ расходится, то точка x_0 называется *точкой расходимости* функционального ряда.

Определение 2. *Областью сходимости* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется множество всех таких значений *x*, при которых функциональный ряд сходится. Область сходимости, состоящая из всех точек сходимости, обозначается $D(x)$. Отметим, что $D(x) \subset$R.

Функциональный ряд сходится в области $D(x)$, если для любого $x \in D(x)$ он сходится как числовой ряд, при этом его сумма будет некоторой функцией $S(x)$. Это так называемая *предельная функция* последовательности $\{S_n(x)\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

Как находить область сходимости функционального ряда $D(x)$? Можно использовать признак, аналогичный признаку Даламбера. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ составляем $u_{n+1}(x)$ и рассматриваем предел при фиксированном x:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |l(x)|$. Тогда $D(x)$ является решением неравенства $|l(x)| < 1$ и решением уравнения $|l(x)| = 1$ (берём только те решения уравнения, в которых соответствующие числовые ряды сходятся).

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Решение. Обозначим $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, $u_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Составим и вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}\cdot n}{x^n\cdot(n+1)}\right| = |x|$, тогда область сходимости ряда определяется неравенством $|x| < 1$, $x \in (-1;1)$ и уравнением $|x| = 1$. Исследуем дополнительно сходимость исходного ряда в точках, являющимися корнями уравнения:

а) если $x = 1$, $u_n(1) = \dfrac{1}{n}$, то получается расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$;

б) если $x = -1$, $u_n(-1) = \dfrac{(-1)^n}{n}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ сходится условно (по признаку Лейбница, пример 1, лекция 3, разд. 3.1).

Таким образом, область сходимости $D(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ имеет вид: $-1 \le x < 1$.

4.2. Степенные ряды: основные понятия, теорема Абеля

Рассмотрим частный случай функционального ряда, так называемый *степенной ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) = a_n (x - x_0)^n$.

Определение 3. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

где $a_0, a_1, a_2, ...$ − постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*.

Степенной ряд есть «бесконечный многочлен», расположенный по возрастающим степеням $(x - x_0)$. Любой числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является частным случаем степенного ряда при $x - x_0 = 1$.

Рассмотрим частный случай степенного ряда при $x_0 = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ Выясним, какой вид имеет область сходимости данного ряда $D(x)$.

Теорема 1 (теорема Абеля). 1) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x = \alpha$ $(\alpha \ne 0)$, то он абсолютно сходится при всяком *x*, для которого справедливо неравенство $|x| < |\alpha|$.

2) Если же степенной ряд расходится при $x = \beta$, то он расходится при всяком *x*, для которого $|x| > |\beta|$.

Доказательство. 1) По условию степенной ряд сходится в точке $x = \alpha$, т. е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n + \ldots \qquad (1)$$

и по необходимому признаку сходимости его общий член стремится к 0, т.е. $\lim_{n\to\infty}(a_n\alpha^n) = 0$. Следовательно, существует такое число $M > 0$, что все члены ряда ограничены этим числом: $\left|a_n\alpha^n\right| \le M, \ (\forall n = 0,1,2,3,\ldots)$.

Рассмотрим теперь любое x, для которого $|x| < |x_0|$, и составим ряд из абсолютных величин: $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots$.

Запишем этот ряд в другом виде: так как $\alpha \ne 0$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1\alpha|\cdot\left|\frac{x}{\alpha}\right| + \left|a_2\alpha^2\right|\cdot\left|\frac{x}{\alpha}\right|^2 + \ldots + \left|a_n\alpha^n\right|\cdot\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n + \ldots \qquad (2).$$

Из неравенства $\left|a_n\alpha^n\right| \le M, \ n = 0,1,2,3,\ldots$ получаем

$|a_0| \le M, \ |a_1\alpha| \le M, \left|a_2\alpha^2\right| \le M, \ \ldots$, т.е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n = M + M\cdot\left|\frac{x}{\alpha}\right| + M\cdot\left|\frac{x}{\alpha}\right|^2 + \ldots + M\cdot\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n + \ldots \qquad (3)$$

состоит из членов, которые больше соответствующих членов ряда (2). Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n$ представляет собой сходящийся ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left|\frac{x}{\alpha}\right|$, причём $|q| < 1$, так как $|x| < |\alpha|$. Следовательно, ряд (2) сходится при $|x| < |\alpha|$. Таким образом, степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится.

2) Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = \beta$, иными словами, расходится числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$. Докажем, что для любого x ($|x| > |\beta|$) ряд расходится. Доказательство ведётся от противного. Пусть при некотором фиксированном x_1 ($|x_1| > |\beta|$) ряд сходится, тогда он сходится при всех $|x| < |x_1|$ (см. первую часть данной теоремы), в частности, при $x = \beta$, что противоречит условию 2) теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие. Теорема Абеля позволяет судить о расположении точки сходимости степенного ряда. Если точка $x = \alpha \neq 0$ является точкой сходимости степенного ряда, то интервал $(-|\alpha|;|\alpha|)$ заполнен точками сходимости; если точкой расходимости является точка $x = \beta$, то бесконечные интервалы $(-\infty;-|\beta|)$, $(|\beta|,\infty)$ заполнены точками расходимости (рис. 1).

Рис. 1. Интервалы сходимости и расходимости ряда

Можно показать, что существует такое число $R > 0$, что при всех $|x| < R$ $(-R < x < R)$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится, а при $|x| > R$ − расходится. Будем считать, что если ряд сходится только в одной точке 0, то $R = 0$, а если ряд сходится при всех $x \in (-\infty,+\infty)$, то $R = \infty$.

Определение 4. *Интервалом сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется такой интервал $(-R, R)$, что при всех $x \in (-R, R)$ этот ряд сходится и притом абсолютно, а для всех x, лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Замечание. На концах интервала $(-R,\ R)$ вопрос о сходимости или расходимости степенного ряда решается отдельно для каждого конкретного ряда.

Покажем один из способов определения интервала и радиуса сходимости степенного ряда.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и обозначим $a_n \cdot x^n = u_n$.

Составим ряд из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + ... + |a_n x^n| + ...$$

и применим к нему признак Даламбера.

Пусть существует

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|\right) = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l\cdot|x|,$$

где

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\ l \neq 0.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $l\cdot|x| < 1$, и расходится, если $l\cdot|x| > 1$. Отсюда ряд сходится при $|x| < \frac{1}{l}$, тогда интервал сходимости: $\left(-\frac{1}{l},\frac{1}{l}\right)$. При $|x| > \frac{1}{l}$ ряд расходится, так как $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$.

Используя обозначение $R = \frac{1}{l}$, получим формулу для определения радиуса сходимости степенного ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R},$$

где a_n, a_{n+1} – коэффициенты степенного ряда.

Если окажется, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l = 0$, то полагаем $R = \infty$.

Для определения интервала и радиуса сходимости степенного ряда также можно использовать радикальный признак Коши, радиус сходимости ряда определяется из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{R}$.

Определение 5. *Обобщенным степенным рядом* называется ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Его также называют рядом по степеням $(x - x_0)$.

Для такого ряда интервал сходимости имеет вид: $(x_0 - R, x_0 + R)$, где $R \geq 0$ – радиус сходимости.

Покажем, как находится радиус сходимости для обобщенного степенного ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n}\right| = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x - x_0| \cdot l < 1,$$

т.е. $|x - x_0| < R$, где $\dfrac{1}{R} = l = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Если $l = 0$, то $R = \infty$, и область сходимости $D(x) =$R; если $l = \infty$, то $R = 0$ и область сходимости $D(x) = \{x_0\}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n}$.

Решение. Обозначим $\dfrac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n} = u_n(x)$. Составим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}\cdot 5^n\cdot n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}\cdot |x+1|^n} = |x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5(n+1)} = \frac{|x+1|}{5}.$$

Решаем неравенство: $\frac{|x+1|}{5} < 1$, $|x+1| < 5$, следовательно, интервал сходимости имеет вид: $-6 < x < 4$, причём $R = 5$. Дополнительно исследуем концы интервала сходимости:

а) $x = 4$, $u_n(4) = \frac{1}{n}$, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится;

б) $x = -6$, $u_n(-6) = \frac{(-1)^n}{n}$, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который сходится условно. Таким образом, область сходимости: $[-6;4)$, $R = 5$.

Ответ: область сходимости $[-6;4)$.

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$ расходится для всех $x \neq 0$, так как $(nx)^n \to \infty$ при $n \to \infty$, радиус сходимости $R = 0$.

Пример 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ сходится при всех $x \in \mathrm{R}$, радиус сходимости $R = \infty$.

4.3. Свойства степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, у которого интервал сходимости $(-R;R)$, тогда сумма степенного ряда $S(x)$ определена для всех $x \in (-R;R)$ и можно записать равенство $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Свойство 1. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно в любом промежутке $[a;b] \subset (-R;R)$, лежащем в интервале сходимости, причём сумма степенного ряда $S(x)$ является непрерывной функцией при всех $x \in [a;b]$.

Свойство 2. Если отрезок $[a;b] \subset (-R;R)$, то степенной ряд можно почленно интегрировать от *a* до *b*, т.е. если

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \text{ то}$$

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\,\mathrm{d}x = \int_a^b a_0\,\mathrm{d}x + \int_a^b a_1 x\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_a^b a_n x^n\,\mathrm{d}x + \ldots.$$

При этом радиус сходимости не меняется:

$$R' = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n'}{a_{n+1}'} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n (n+2)}{(n+1) a_{n+1}} \right| = R,$$

где $a_n' = \dfrac{a_n}{n+1}$ – коэффициенты проинтегрированного ряда.

Свойство 3. Сумма степенного ряда есть функция, имеющая внутри интервала сходимости производные любого порядка. Производные от суммы степенного ряда будут суммами рядов, полученных из данного степенного ряда почленным дифференцированием соответствующее число раз, причём радиусы сходимости таких рядов будут те же, что и у исходного ряда.

Если $S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$,

то $S'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$,

$S''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$, …, и т.д.

4.4. Формула Тейлора

Рассмотрим важную задачу, которая решается в теории функциональных рядов: по заданной функции найти сходящийся функциональный ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Такая задача называется *разложением функции в ряд*, например, степенной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0: $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$, причём в этой окрестности функция имеет все производные до $(n+1)$-го порядка.

Задача: Подберём многочлен n-й степени $P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_n(x - x_0)^n$ по степеням $(x - x_0)$ так, чтобы в точке x_0 совпадали значения $P_n(x)$ и $f(x)$, а также значения их производных до $(n+1)$-го порядка включительно. Тогда считаем, что в окрестности точки x_0 такой многочлен $P_n(x)$ будет приближать данную функцию с некоторой точностью.

Коэффициенты многочлена $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ являются неопределенными коэффициентами, которые необходимо найти исходя из следующих условий:

$f(x_0) = P_n(x_0),\ f'(x_0) = P_n'(x_0),\ f''(x_0) = P_n''(x_0),\ \dots,\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0)$.

Для нахождения этих коэффициентов найдём производные до n-го порядка от $P_n(x)$:

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + ... + nc_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3(x - x_0) + ... + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$\dots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1\cdot c_n = c_n\cdot n!,$$

$P_n^{(n+1)}(x) = 0$, при всех $x \in \mathrm{R}$.

Подставим в эти соотношения $x = x_0$ и приравняем $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0)$, где $k = 0,1,2,3,...,n$:

$f(x_0) = P_n(x_0) = c_0,\ \ f'(x_0) = P_n'(x_0) = c_1,\ \ f''(x_0) = P_n''(x_0) = 2c_2,$

$f'''(x_0) = P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot c_3,\ \dots\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = c_n \cdot n!.$

Находим выражения для $c_0,\ c_1,\ c_2,...,\ c_n$, решая полученную систему уравнений:

$$c_0 = f(x_0);\ c_1 = f'(x_0);\ c_2 = \frac{f''(x_0)}{2};\ c_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3} = \frac{f'''(x_0)}{3!};\ ...;\ c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Получаем общую формулу для определения коэффициентов многочлена c_k:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ \ k = 0,1,2,3,...,n. \tag{4}$$

Тогда многочлен примет следующий вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Этот многочлен называется *многочленом Тейлора* для функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$, где $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ называются *коэффициентами многочлена Тейлора*, $k = \overline{0,n}$.

Таким образом, для каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей поставленным условиям при $x \in U_\delta(x_0)$, можно найти многочлен Тейлора $P_n(x)$ (в точке x_0 функция $f(x)$ и многочлен $P_n(x)$ совпадают со своими производными до n-го порядка).

Разность $f(x) - P_n(x)$, обозначенную через $R_n(x)$, называют *остаточным членом* формулы Тейлора, которая имеет вид:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \tag{5}$$

Формула (5) называется *формулой Тейлора для функции* $f(x)$ *по степеням* $(x-x_0)$ порядка *n*. Отметим, что

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\ldots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$$

Величина остаточного члена формулы Тейлора $R_n(x)$ играет важную роль в оценке точности приближения заданной функции многочленом Тейлора. Существует два вида остаточных членов.

1) Остаточный член в *форме Пеано*. Преобразуем остаточный член формулы Тейлора, используя некоторые понятия из теории пределов.

а) Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

б) Бесконечно малая функция $\beta(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости относительно бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x\to x_0$, если существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$ и записывается следующим образом: $\beta=o(\alpha)$ (что читается так: «β есть o малое от α).

Рассмотрим формулу Тейлора для функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$ порядка *n*: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$. Остаточный член в формуле Тейлора имеет вид: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. Из построения многочлена Тейлора следует $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\ldots=R_n^{(n)}(x_0)=0$.Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\cdot(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=0,$$

откуда остаточный член формулы Тейлора можно записать в виде:

$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, т.е. величина остаточного члена есть бесконечно малая более высокого порядка малости относительно $(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$.

Формула Тейлора $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, в которой $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, называется *формулой Тейлора с остаточным членов в форме Пеано*. Поскольку остаточный член при $x \to x_0$ является бесконечно малой величиной, то можно считать, что разность $f(x) - P_n(x)$ бесконечно мала, т.е. $f(x) \to P_n(x)$.

2) Остаточный член в *форме Лагранжа*. Запишем остаточный член в виде

$R_n(x) = \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x)$, где $Q(x)$ есть некоторая функция, подлежащая определению. Можно доказать, что $Q(x) = f^{(n+1)}(\xi)$, где точка ξ заключена между x и x_0: $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, т.е. остаточный член имеет вид: $R_n(x) = \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$. Тогда формула Тейлора примет вид $f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, который называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*. Рассмотрим частные случаи формулы Тейлора.

– Если в формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа положить $n = 0$, то получаем *формулу конечного приращения*: $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(\xi)$ (*теорема Лагранжа*).

– Если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим формулу, которую называют *формулой Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x),$$

где остаточный член можно записать в форме Пеано: $R_n(x) = o(x^n)$ или в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Формула Маклорена является разложением функции $f(x)$ в виде многочлена по степеням x.

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x^2}$ в виде многочлена третьего порядка по степеням $(x-2)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Решение. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$ в виде многочлена 3-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!} \cdot (x-2) + \frac{f''(2)}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!} \cdot (x-2)^3 + R_3(x),$$

где $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (x-2)^4$.

Находим производные нужного порядка в точке $x = 2$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ f(2) = \frac{1}{4};\ f'(x) = -\frac{2}{x^3},\ f'(2) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4};$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4},\ f''(2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8};\ f'''(x) = -\frac{24}{x^5},\ f'''(2) = -\frac{24}{32} = -\frac{3}{4};$$

$$f''''(x) = \frac{120}{x^6},\ f''''(\xi) = \frac{120}{\xi^6}, \text{ где } \xi = 2 + \theta(x-2),\ \theta \in (0;1).$$

Полученные данные подставляем в формулу Тейлора

$f(x) = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) + \frac{3}{16}(x-2)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)(x-2)^3 + R_3(x)$ и вычисляем

$R_3(x) = \frac{(x-2)^4}{4!} \cdot \frac{120}{\xi^6} = \frac{5 \cdot (x-2)^4}{(2 + \theta(x-2))^6},\ \theta \in (0;1)$.

Можно сказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ заменяется многочленом с точностью, которую можно определить, оценив остаточный член формулы Тейлора $R_3(x) = \frac{(x-2)^4}{4!} \cdot \frac{120}{\xi^6}$ при $x \to 2$.